02 1992

7 6 2

ТУ–19–241–82

8

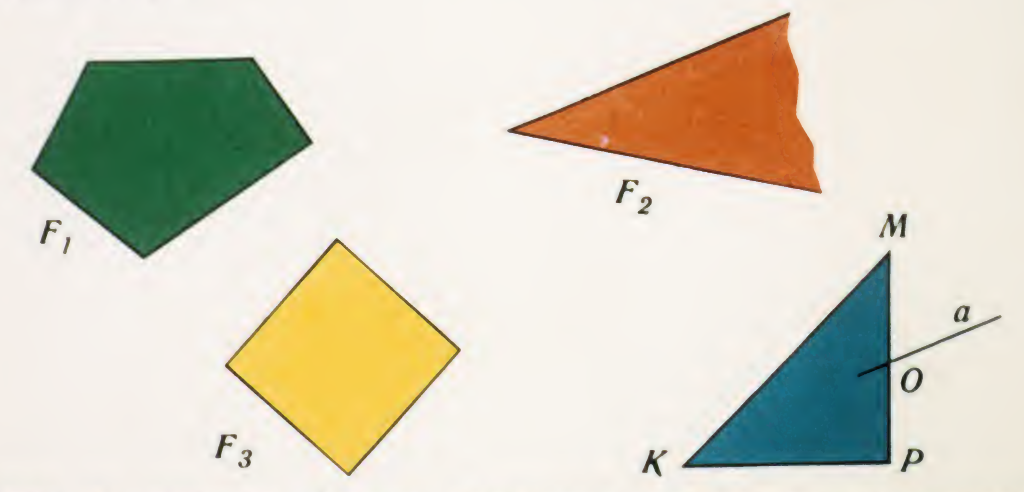
3


студия
ДИАФИЛЬМ

07—3—516


ПЛОЩАДИ
Диафильм по геометрии
для VIII класса

Плоским многоугольником (многоугольной областью) называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.

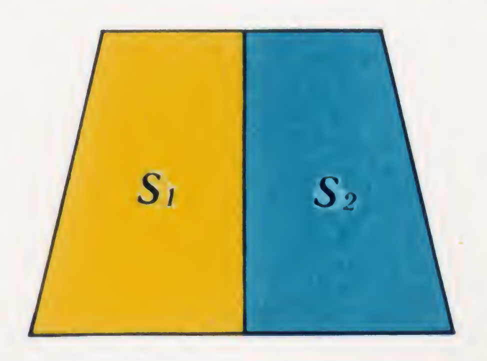


Какие из данных фигур являются плоскими многоугольниками?

Прямая a пересекает сторону плоского треугольника KMP в точке O. Сколько общих точек имеют этот треугольник и прямая a?

СВОЙСТВА ПЛОЩАДИ:

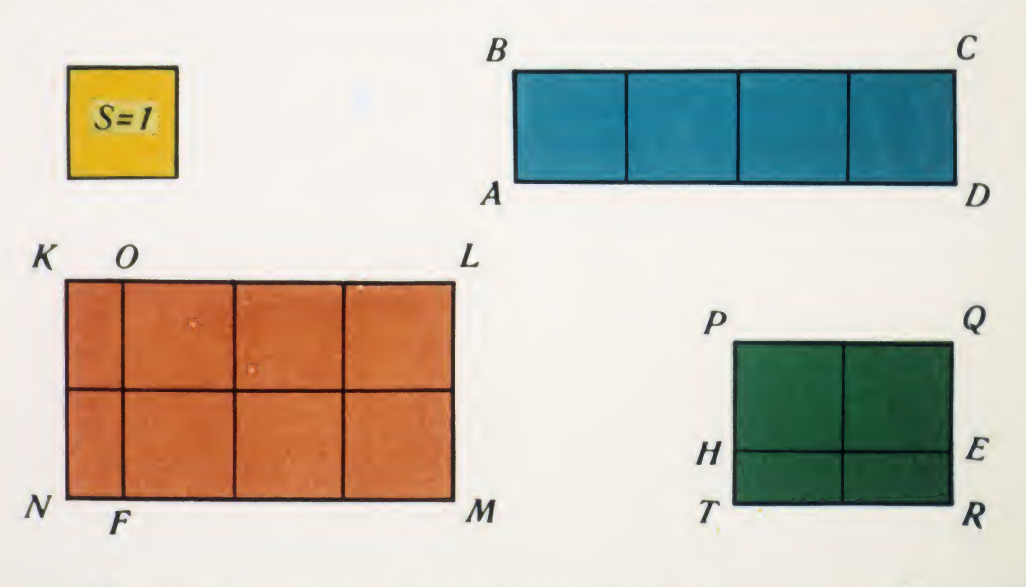
1. Каждая многоугольная область имеет площадь.
2. Равные области имеют равные площади.
3. Если область разбита на две части, то ее площадь равна сумме площадей частей.



Известно, что стороны одного треугольника равны 3, 4 и 5 см, а второго — 50, 30 и 40 мм. Равны ли площади этих треугольников? Верно ли, что области, имеющие равные площади, равны? Докажите, что площадь области, разбитой на три части, равна сумме площадей частей.

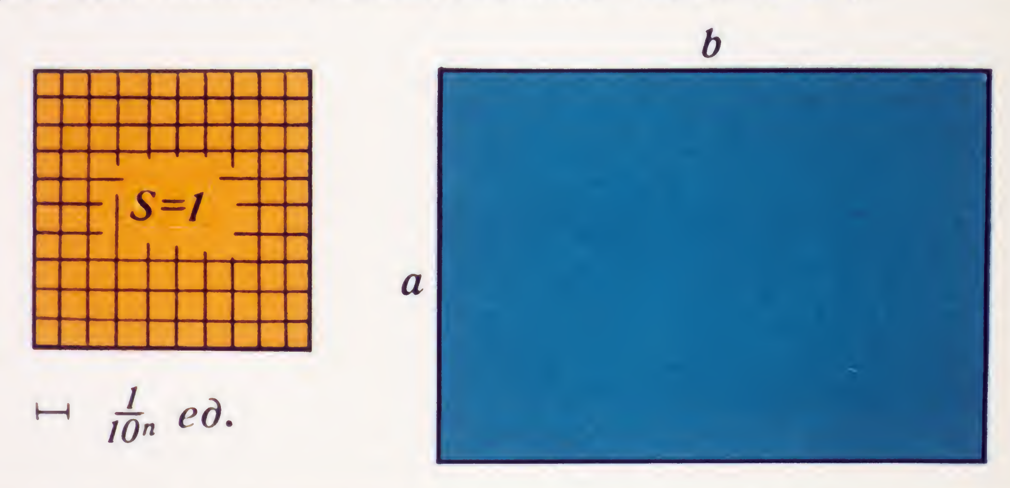
Единица измерения площади — квадрат со стороной, равной единице длины.

Если длины сторон прямоугольника выражаются целыми числами, то его площадь равна произведению сторон.



Какова площадь каждого прямоугольника?

Покажем, что формула площади прямоугольника ($S=ab$) верна для любых положительных чисел a и b.

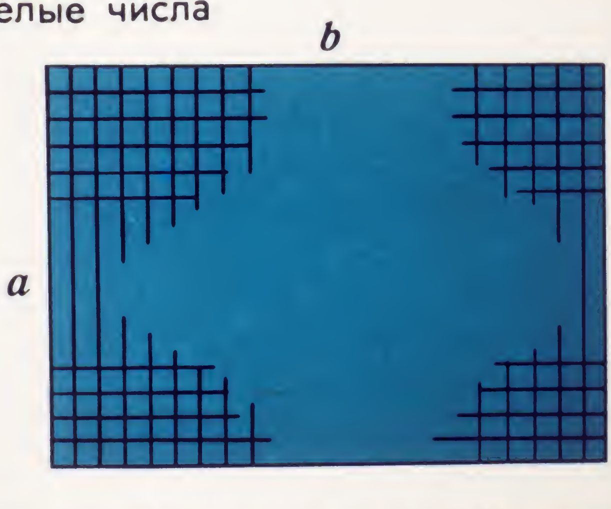


Пусть a и b — конечные десятичные дроби и число знаков справа от запятой не больше n. Разделим каждую сторону квадрата на 10^n равных отрезков.

Какова длина каждого такого отрезка? Какова площадь каждого получившегося квадрата?

Разделим стороны прямоугольника на отрезки длиной $\frac{1}{10^n}$ *ед.*

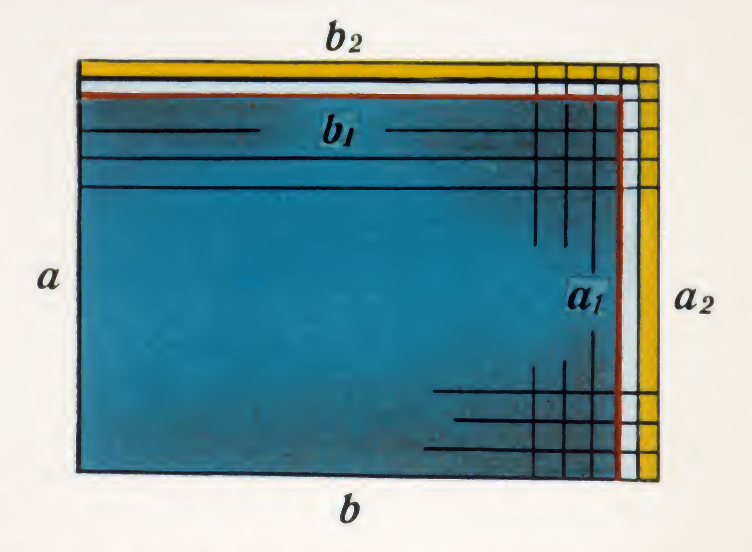
$$\left.\begin{aligned} a : \frac{1}{10^n} &= a \cdot 10^n \\ b : \frac{1}{10^n} &= b \cdot 10^n \end{aligned}\right\} \text{— целые числа}$$



$S = 1$

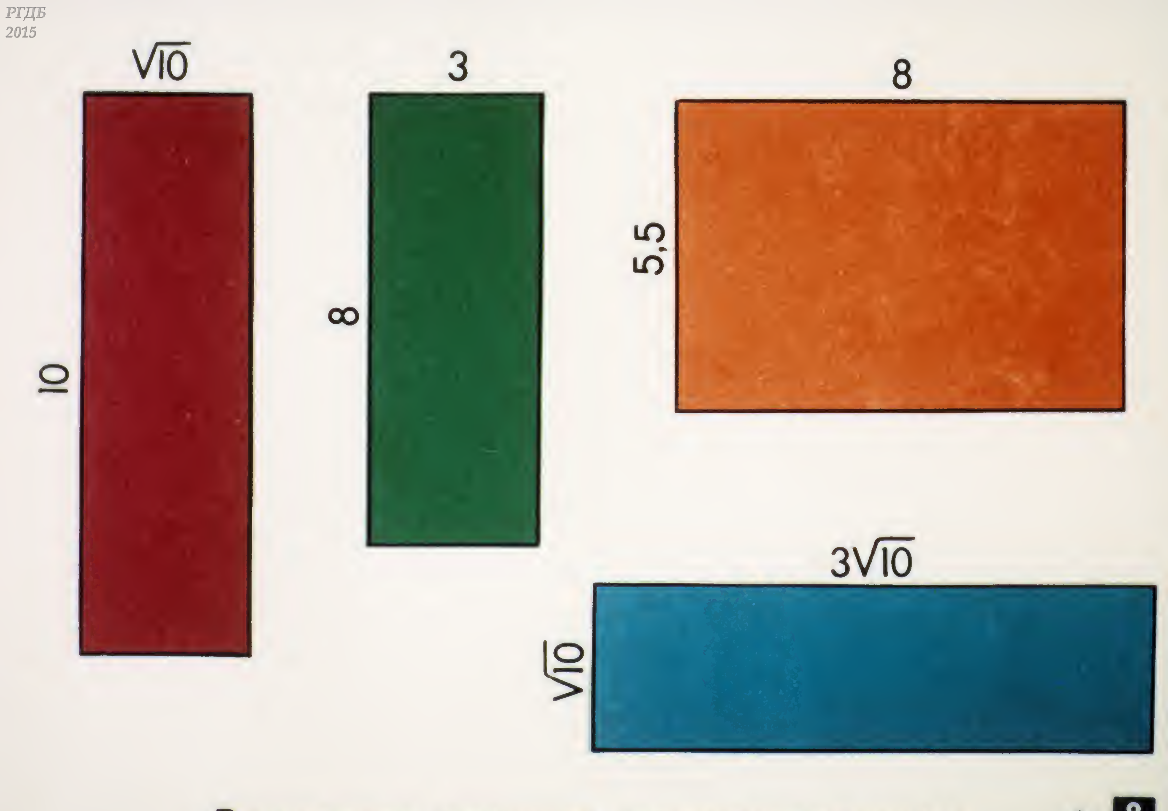
$\vdash\!\dashv \ \frac{1}{10^n}$ *ед.*

Всего в прямоугольнике $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n = ab \cdot 10^{2n}$ малых квадратов, а в единичном квадрате 10^{2n} малых квадратов. Значит, $S_{пр} = ab\ (ед^2)$.



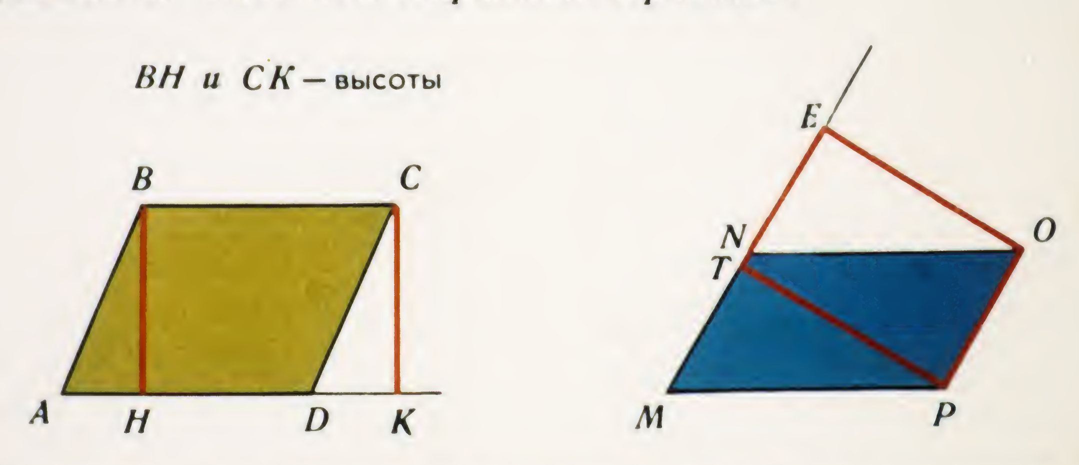
Пусть хотя бы одна из сторон прямоугольника выражается бесконечной десятичной дробью. Тогда $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b \leqslant b_2$, где a_1, b_1, a_2, b_2 — приближенные значения a и b с недостатком и с избытком.

Увеличивая значения n, можно подсчитать значение S с любой заданной точностью. Поэтому считают $S = ab$.



Вычислите площади прямоугольников. ▲ 8

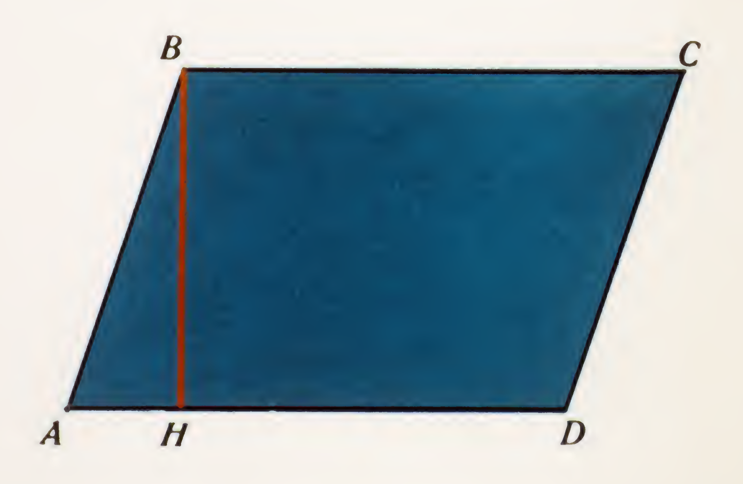
Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на прямую, содержащую противолежащую сторону, называется *высотой параллелограмма*.



Докажите, что высоты параллелограмма, проведенные к одной стороне, параллельны и равны.

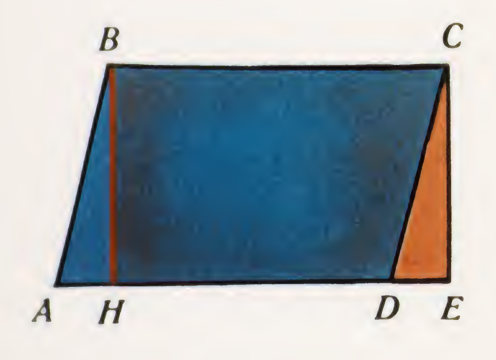
Докажите, что четырехугольник *BCKH* — прямоугольник.
Докажите, что *PT* и *OE* — высоты параллелограмма *MNOP*, если *PTEO* — прямоугольник.

ТЕОРЕМА. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



Выделите условие и заключение теоремы.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, BH — высота.



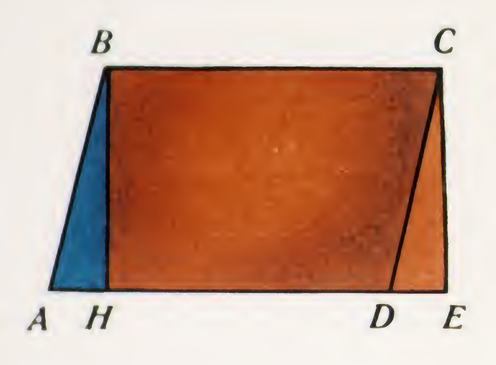
Доказать: $S(ABCD) = BC \cdot BH$.

Доказательство.

Пусть $\angle A$ острый, $CE \perp BC$.

. . .

Из каких двух многоугольников можно составить трапецию $ABCE$?



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, BH — высота.

Доказать: $S(ABCD) = BC \cdot BH$.

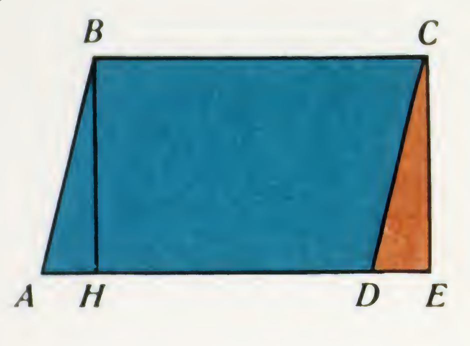
Доказательство.

Пусть $\angle A$ острый, $CE \perp BC$.

$S(ABCD) + S(DCE) = S(BCEH) + S(ABH)$.

• • •

Объясните, как получено равенство. Какие свойства площадей при этом использовались? Докажите, что $S(ABH) = S(DCE)$.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, BH — высота.

Доказать: $S\ (ABCD) = BC \cdot BH$.

Доказательство.

Пусть $\angle A$ острый, $CE \perp BC$.

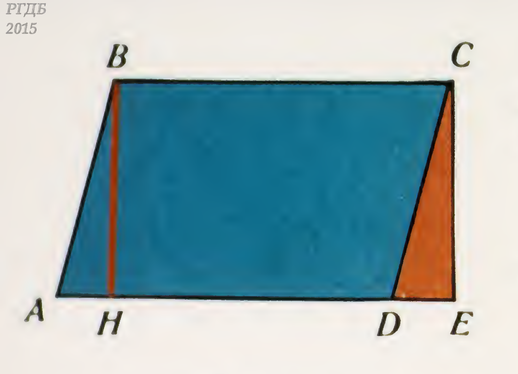
$S(ABCD) + S(DCE) =$
$= S(BCEH) + S(ABH)$.



$S(ABCD) = S(BCEH)$.

. . .

Объясните, как получено последнее равенство.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, BH — высота.

Доказать: $S(ABCD) = BC \cdot BH$.

Доказательство.

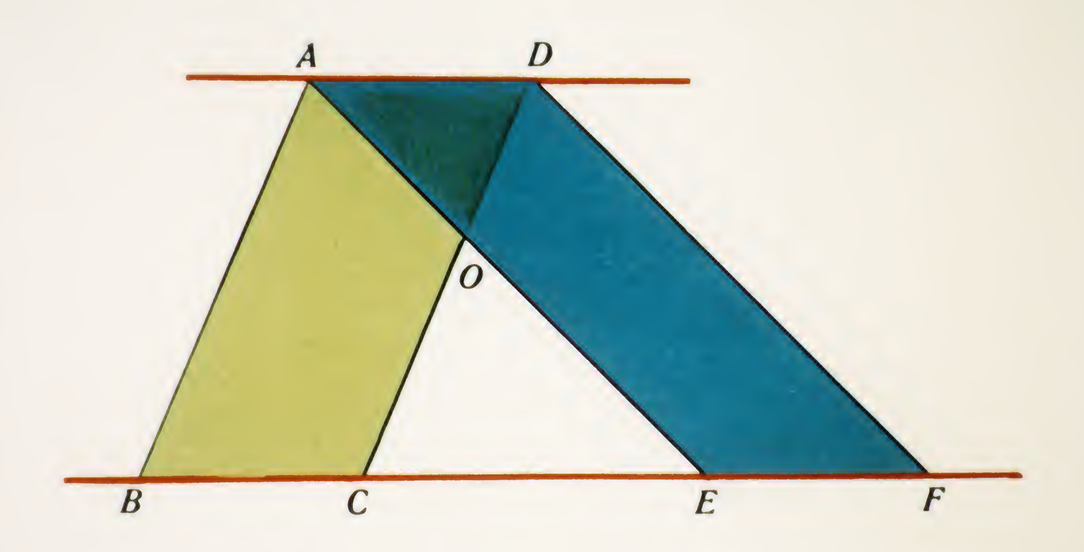
Пусть $\angle A$ острый, $CE \perp BC$.

$S(ABCD) + S(DCE) = S(BCEH) + S(ABH)$.

$S(ABCD) = S(BCEH)$.

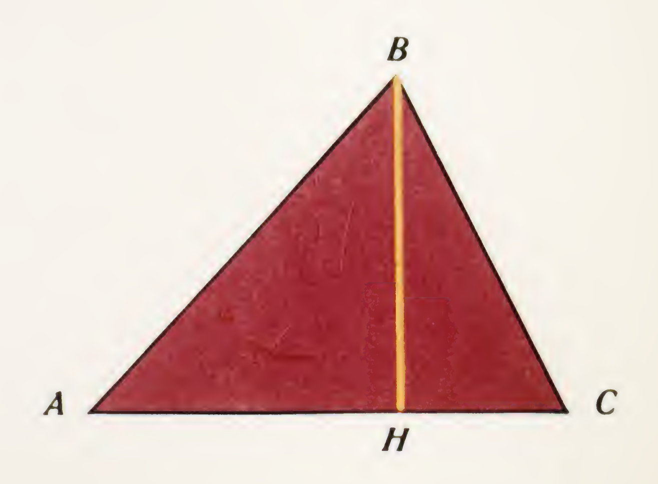
$S(ABCD) = BC \cdot BH$.

Какая известная вам формула использована для получения последнего равенства? Проведите полное доказательство по чертежу и записям кадра.

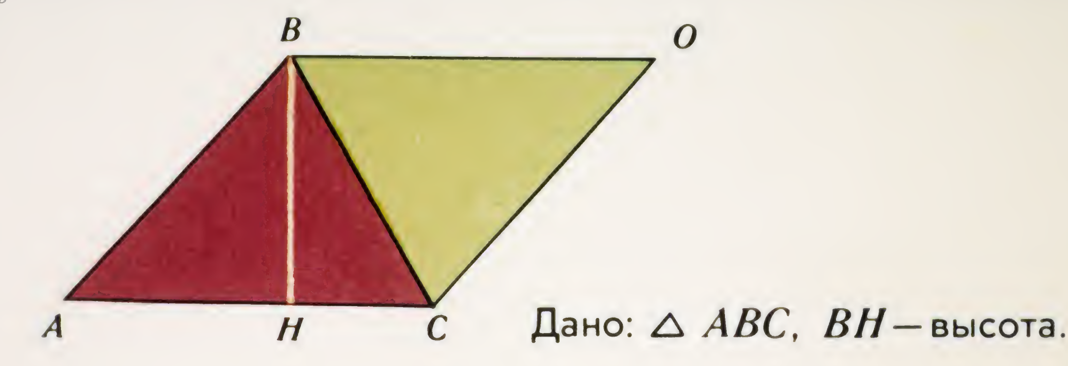


Четырехугольники $ABCD$ и $ADFE$ — параллелограммы. Докажите, что площади четырехугольников $ABCO$ и $DOEF$ равны.

ТЕОРЕМА. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



Выделите условие и заключение теоремы.



Дано: $\triangle ABC$, BH — высота.

Доказать: $S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Доказательство.

Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма.

. . .

Докажите, что $\triangle ABC = \triangle OCB$.

Какой вывод можно сделать о площадях $\triangle ABC$ и $\triangle OCB$?



Дано: $\triangle ABC$, BH — высота.

Доказать: $S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Доказательство.

Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма.

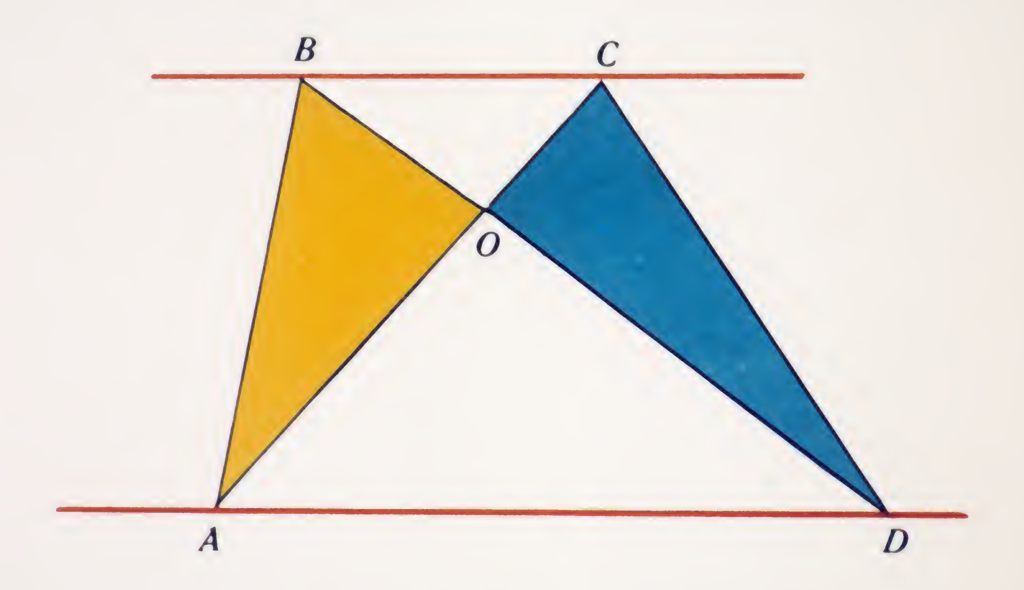
$\triangle ABC = \triangle OCB$.

$S(ABC) = S(OCB)$.

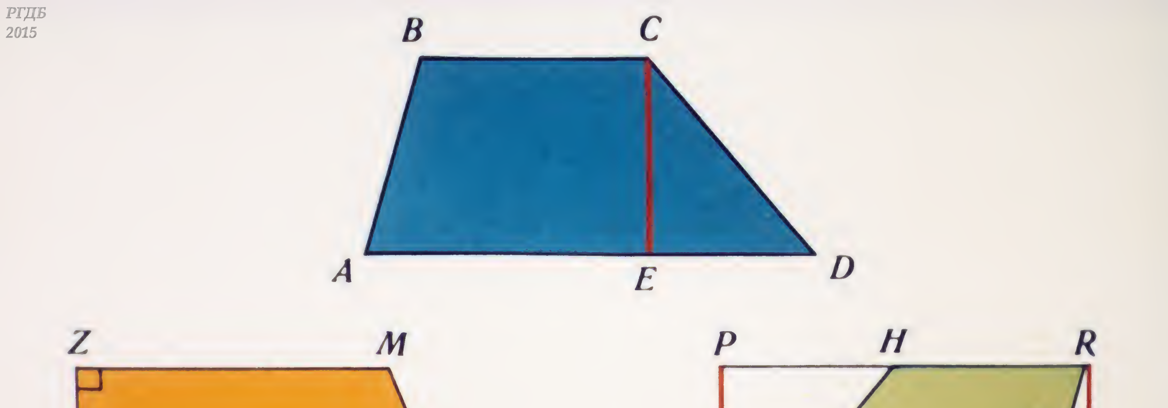
$S(ABOC) = 2S(ABC)$.

$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Объясните, как получены два последние равенства. Проведите полное доказательство теоремы по чертежу и записям кадра.



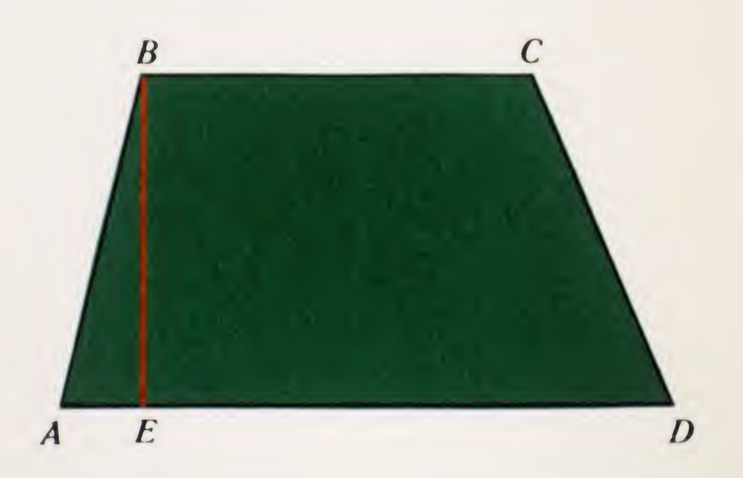
Четырехугольник $ABCD$ — трапеция. Докажите, что площади треугольников ABO и COD равны.



$CE \perp AD$, CE — высота трапеции $ABCD$.

Найдите высоты трапеций $KZMN$ и $OHRF$. Докажите, что все высоты трапеции равны между собой. Докажите, что длина высоты трапеции равна расстоянию между параллельными сторонами.

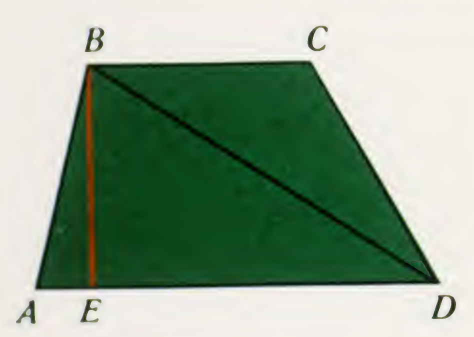
ТЕОРЕМА. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.



Выделите условие и заключение теоремы.

Дано: $ABCD$ — трапеция, BE — высота.

Доказать: $S(ABCD) = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE$.



Доказательство.

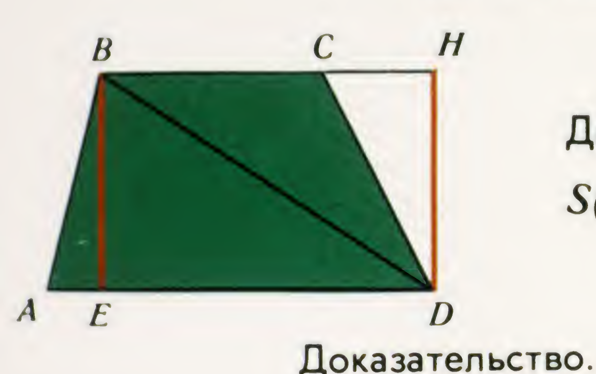
Проведем диагональ BD.

$S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD)$.

. . .

На основе какого свойства площади получено равенство?
Как вычислить площади $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$?

Дано: $ABCD$ — трапеция, BE — высота.



Доказать:

$S(ABCD)=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BE.$

Доказательство.

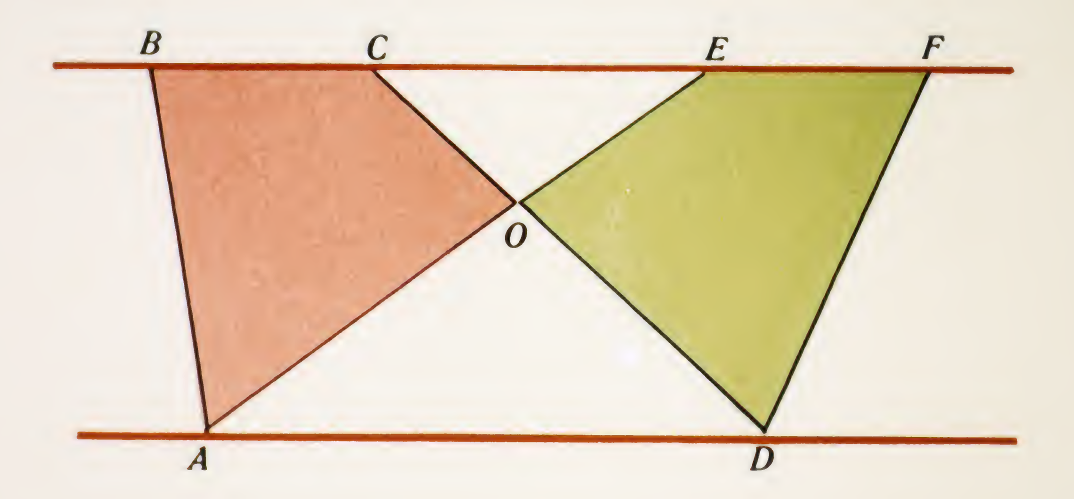
Проведем диагональ BD.

$S(ABCD)=S(ABD)+S(BCD).$

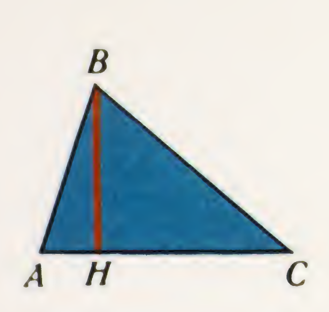
$S(ABD)=\frac{1}{2}AD\cdot BE.$ $S(BCD)=\frac{1}{2}BC\cdot BE.$

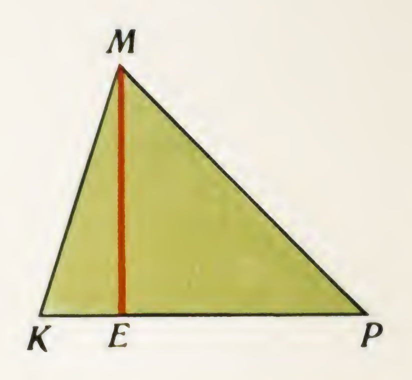
$S(ABCD)=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BE.$

Объясните, как получены два последних равенства. Проведите полное доказательство теоремы, используя чертеж и записи кадра.



Четырехугольник *ABFD* — трапеция, *BC*=*EF*. Докажите, что площади четырехугольников *ABCO* и *DOEF* равны.



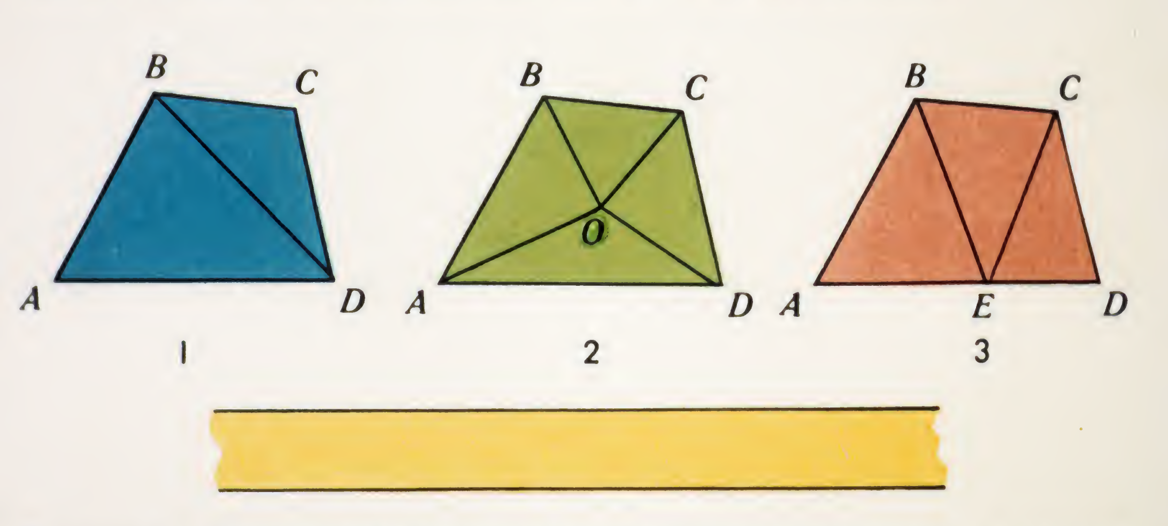


$\triangle ABC \sim \triangle KMP$, $KM : AB = k$.
Каковы соотношения между углами треугольников, их сторонами? Докажите, что преобразование подобия переводит высоту данного треугольника в высоту подобного ему треугольника.

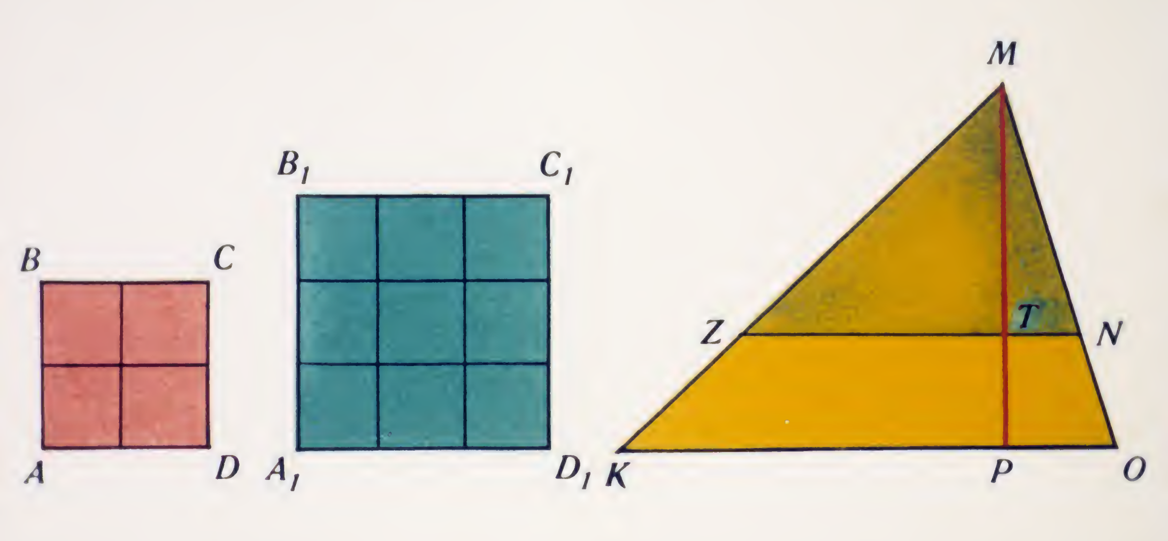
Докажите, что $S(KMP) : S(ABC) = k^2$.



Плоская фигура называется *простой*, если она может быть разбита на конечное число треугольников.



Докажите, что любой выпуклый многоугольник является простой фигурой. Является ли простой фигурой полоса — часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми?



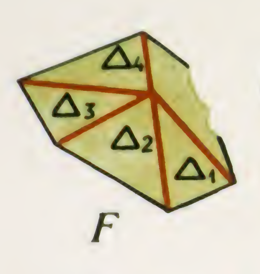
ТЕОРЕМА. Площади подобных простых фигур относятся как квадраты коэффициентов подобия.

Выделите условие и заключение теоремы.

Дано: F и F_1 — простые фигуры; $F \backsim F_1$;
k — коэффициент подобия.

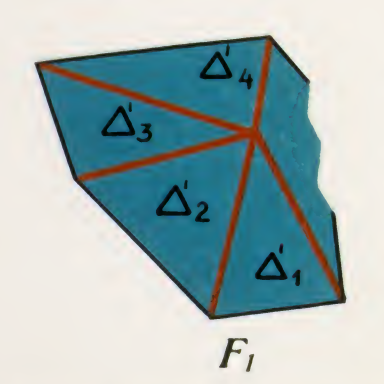
Доказать: $S(F_1) : S(F) = k^2$.

Какие выводы можно сделать о простых фигурах F и F_1? их соответственных линейных размерах?



Дано: F и F_1 — простые фигуры; $F \sim F_1$; k — коэффициент подобия.

Доказать: $S(F_1) : S(F) = k^2$.



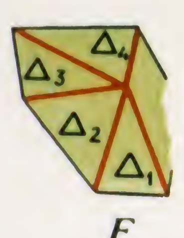
Доказательство.

Разобьем фигуру F на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Преобразование подобия переводит F в F_1, Δ_1 в Δ'_1, Δ_2 в Δ'_2, ..., Δ_n в Δ'_n.

...

Какой вывод можно сделать о площади фигуры F; фигуры F_1? Чему равны отношения $S(\Delta'_1) : S(\Delta_1)$, $S(\Delta'_2) : S(\Delta_2)$, ..., $S(\Delta'_n) : S(\Delta_n)$?



F

Дано: F и F_1 — простые фигуры; $F \sim F_1$; k — коэффициент подобия.

Доказать: $S(F_1) : S(F) = k^2$.

Δ'_4 Δ'_3 Δ'_2 Δ'_1

F_1

Доказательство.

Разобьем фигуру F на $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Преобразование подобия переводит

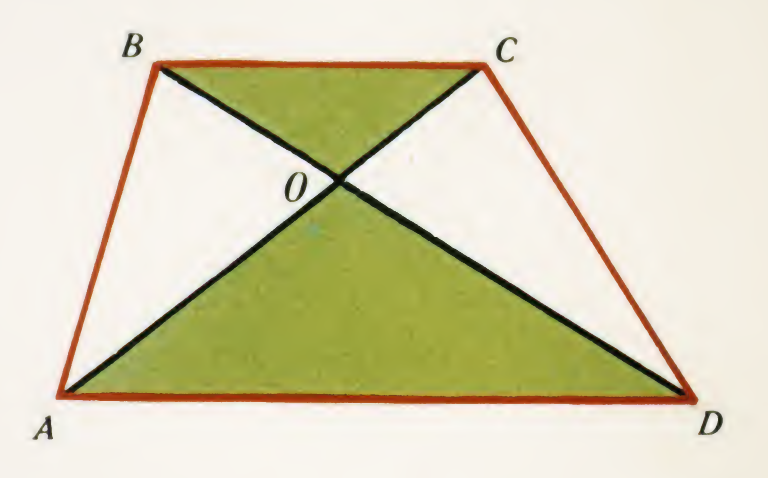
F в F_1,

Δ_1 в Δ'_1, Δ_2 в Δ'_2, …, Δ_n в Δ'_n.

$S(F) = S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + \dots + S(\Delta_n)$.

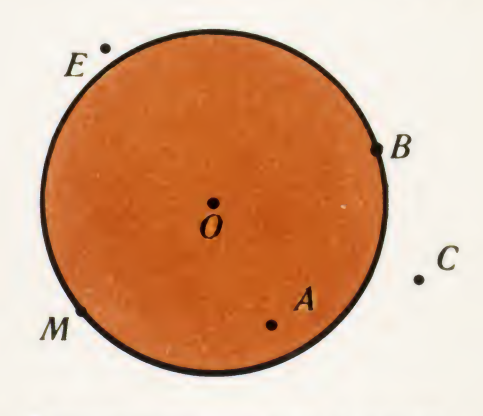
$S(F_1) = S(\Delta'_1) + S(\Delta'_2) + \dots + S(\Delta'_n) =$
$= k^2\left(S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + \dots + S(\Delta_n)\right)$. $S(F_1) : S(F) = k^2$.

Объясните равенства. Проведите полное доказательство теоремы по чертежу и записям кадра.



Основания трапеции равны 4 м и 8 м. Каково отношение площадей треугольников ODA и OBC?

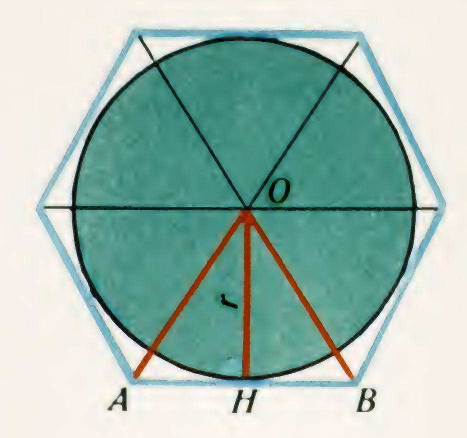
Кругом называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии не больше данного от заданной точки (центра круга).



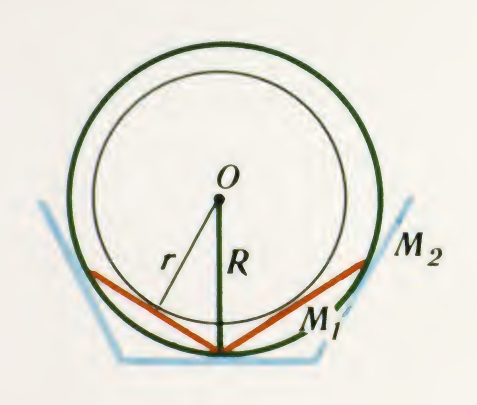
Окружность—граница круга.

Какие из данных точек принадлежат кругу?

Точки X и $У$ принадлежат кругу радиуса 5 см. Может ли расстояние между X и $У$ быть равным 2 см; 60 мм; 1 дм; 12 см?



Докажите, что площадь выпуклого многоугольника, описанного около круга, вычисляется по формуле $S=\frac{pr}{2}$, где p — периметр, r — радиус круга.



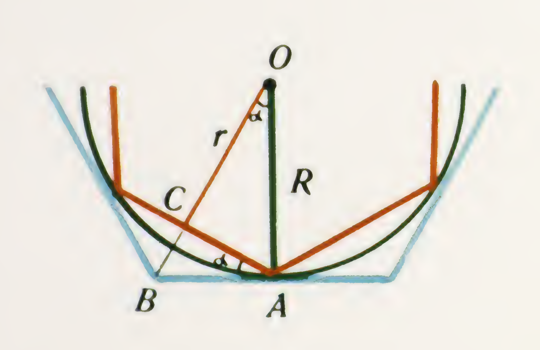
ТЕОРЕМА. Площадь круга вычисляется по формуле $S=\frac{lR}{2}=\pi R^2$, где l — длина окружности, R — радиус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Впишем в круг радиуса R и опишем около него правильные n-угольники M_1 и M_2.

. . .

Выразите площади этих многоугольников через их периметры (p_1) и (p_2) и радиусы $(r$ и $R)$ вписанных в них кругов. Сравните площадь круга с площадями многоугольников M_1 и M_2.



Дано: круг радиуса R.

Доказать: $S = \frac{lR}{2} = \pi R^2$.

Доказательство.

$S(M_1) = \frac{1}{2} p_1 r$.

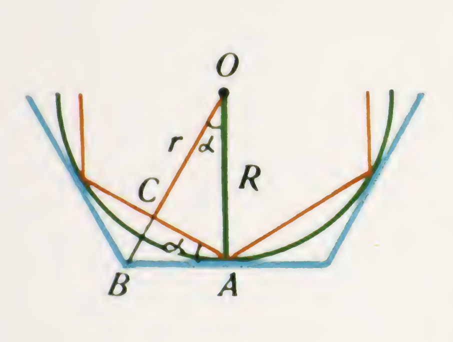
$S(M_2) = \frac{1}{2} p_2 R$.

$S(M_1) < S < S(M_2)$.

...

Выразите сторону многоугольника M_1 через сторону вписанного многоугольника и $\cos\alpha$, где $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$.

Выразите p_2 через p_1; r через R.



Дано: круг радиуса R.

Доказать: $S=\frac{lR}{2}=\pi R^2$.

Доказательство.

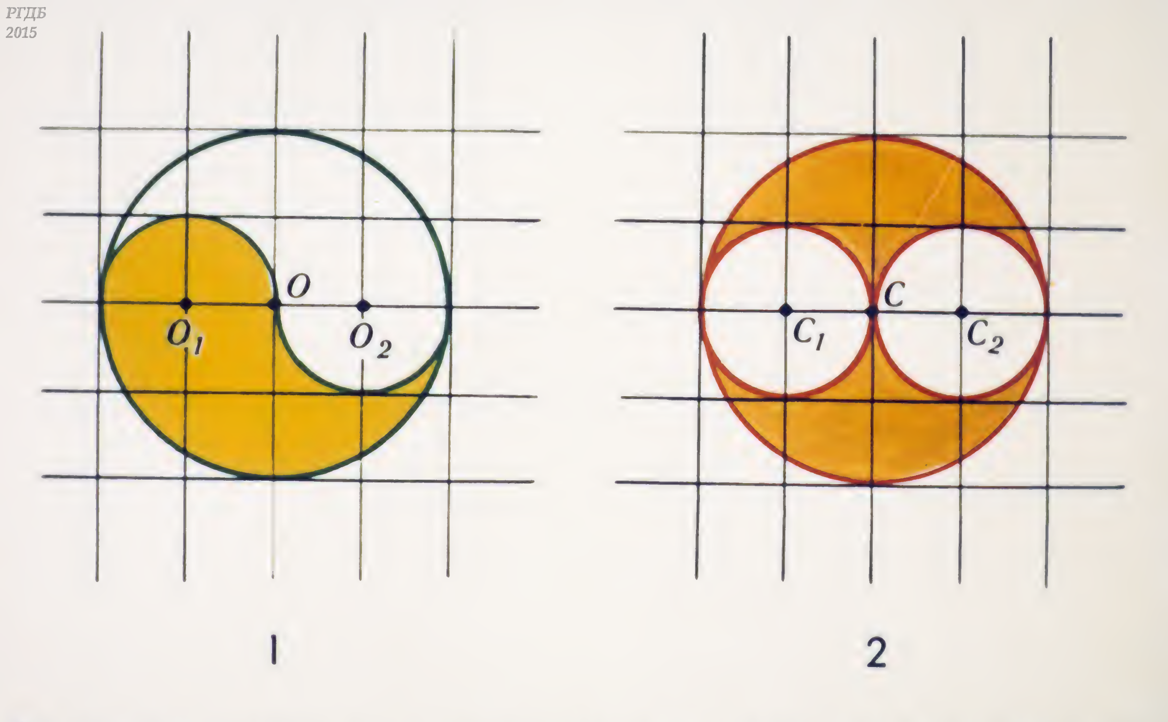
$S(M_1)=\frac{1}{2}p_1 r,\quad S(M_2)=\frac{1}{2}p_2 R.$

$$S(M_1)<S<S(M_2).$$

$2AB=\frac{2AC}{\cos\alpha};\quad p_2=\frac{p_1}{\cos\alpha};\quad r=R\cos\alpha.$

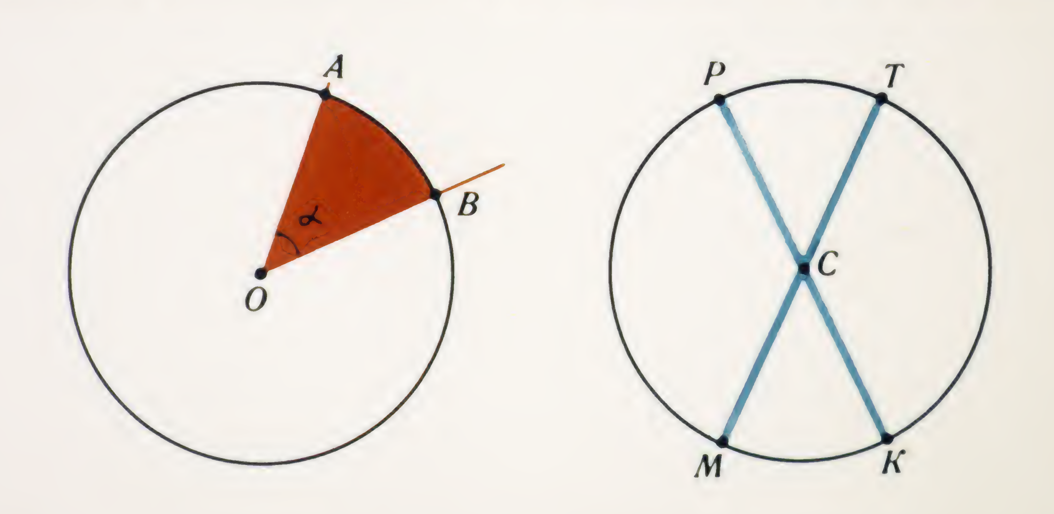
$$\frac{1}{2}p_1 R\cos\alpha<S<\frac{1}{2}p_1 R\frac{1}{\cos\alpha}.$$

При достаточно больших n p_1 сколь угодно мало отличается от l, α от $0°$, $\cos\alpha$ от 1. Поэтому левая и правая части последнего неравенства сколь угодно мало отличаются от $\frac{lR}{2}$. Значит, $S=\frac{lR}{2}=\pi R^2$.

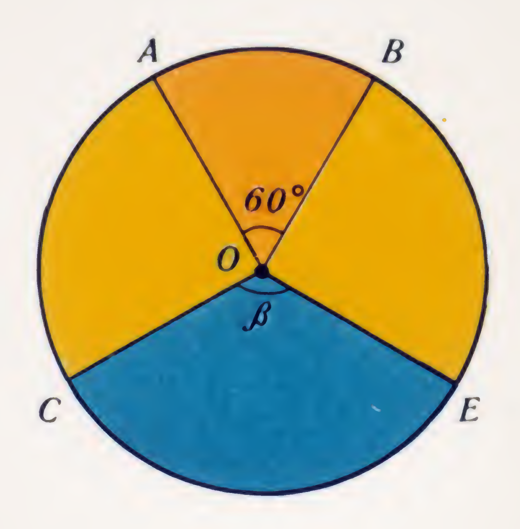


Вычислите площадь закрашенной части круга, если радиус круга равен 2.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла. На сколько секторов разбивают круг два радиуса? **Четыре радиуса?**



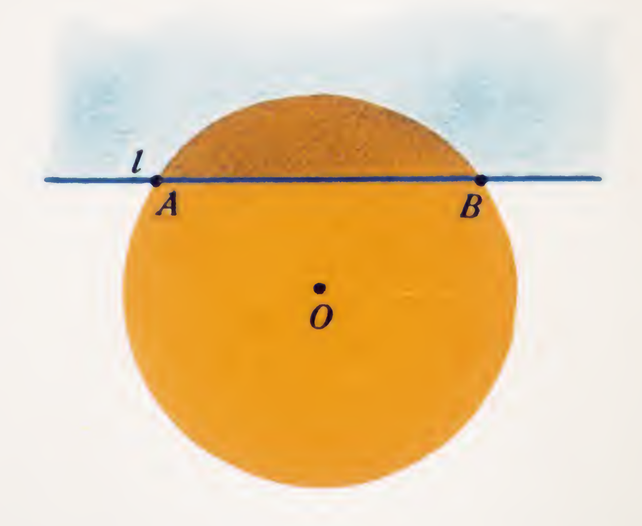
Круг разделен на два равных сектора. Каков угол между ограничивающими их радиусами?



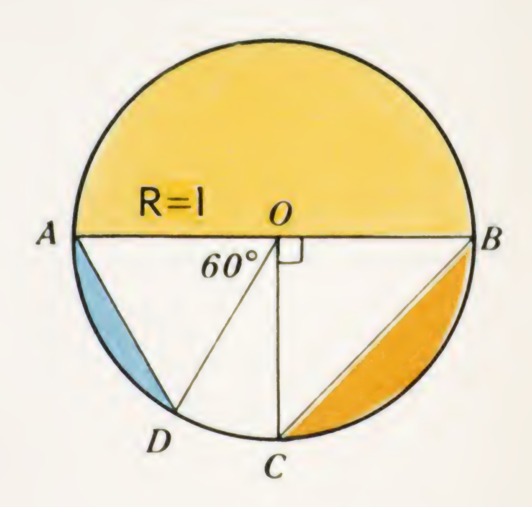
Какую часть площади круга составляет площадь сектора с центральным углом 60°; β градусов?

Докажите, что площадь сектора с углом α вычисляется по формуле $S=\pi R^2 \frac{\alpha}{360^\circ}$.

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости.



На сколько сегментов делит круг хорда? Круг разделен на два равных сегмента. Чем служит хорда, ограничивающая эти сегменты?



Вычислите площадь красного сегмента; желтого сегмента. Как вычислить площадь сегмента, дуга которого соответствует центральному углу в 60 градусов?

КОНЕЦ

Диафильм создан по программе, утвержденной Министерством просвещения СССР

Автор Ю. Глазков
Художник-оформитель Н. Дунаева
Редактор В. Чернина

103 062, Москва, Старосадский пер., 7
Д-240-85 Цветной